

## Proprietà delle potenze

### Definizione

Dati due numeri  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  si definisce **potenza  $n$ -esima** di base **a** ed esponente **n**, e si indica con  $a^n$ , il prodotto di  $n$  fattori uguali ad  $a$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

### Proprietà

$a^0 = 1, a \neq 0$

$0^n = 0, n \neq 0$

$0^0$  **indeterminato**

### Potenze con la stessa base

|                           |   |                                    |
|---------------------------|---|------------------------------------|
| $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ | <b>Prodotto</b> di potenze con la <b>stessa base</b> → la <b>base rimane uguale</b> e si <b>sommano</b> gli esponenti     | $2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9$    |
| $a^n : a^m = a^{n-m}$     | <b>Rapporto</b> di potenze con la <b>stessa base</b> → la <b>base rimane uguale</b> e si <b>sottraggono</b> gli esponenti | $3^8 : 3^2 = 3^{8-2} = 3^6$        |
| $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ | <b>Potenza di una potenza</b> → la <b>base rimane uguale</b> e si <b>moltiplicano</b> gli esponenti                       | $(5^3)^7 = 5^{3 \cdot 7} = 5^{21}$ |

### Potenze con lo stesso esponente

|  |   |  |
|--|---|--|
| $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$                | <b>Prodotto</b> di potenze con <b>stesso esponente</b> → l' <b>esponente rimane uguale</b> e si <b>moltiplicano le basi</b> | $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$         |
| $a^n : b^n = (a : b)^n$                        | <b>Rapporto</b> di potenze con <b>stesso esponente</b> → l' <b>esponente rimane uguale</b> e si <b>dividono le basi</b>     | $21^5 : 7^5 = (21 : 7)^5 = 3^5$                |
| $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ | <b>Frazione</b> di potenze con <b>stesso esponente</b> → <b>esponente uguale</b> e <b>frazione delle basi</b>               | $\frac{2^7}{3^7} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$ |

### Potenze con base negativa

|  |   |
|--|---|
| Esponente <b>n</b> <b>pari</b> e $a > 0$                                 | Esponente <b>n</b> <b>dispari</b> e $a > 0$ |
| $(-a)^n = +a^n$<br><b>n pari il segno è +</b>                            | $(-3)^4 = +3^4$                             |
| $(-a)^n = -a^n$<br><b>n dispari il segno è -</b>                         | $(-3)^5 = -3^5$                             |
| <b>Attenzione alle parentesi quando l'esponente è pari !!</b>            |   |
| $(-3)^2 = +3^2 = 9$ invece $-3^2 = -9$ ; $(-1)^0 = 1$ invece $-1^0 = -1$ |   |

### Generalizzazione: $a^n$ , $n \in \mathbb{Q}$ e $a > 0$

**Potenze con esponente  $n \in \mathbb{Q}$ .** In questo caso la base  $a$  deve essere positiva e non nulla  $a > 0$

#### Esponente negativo

|  |  |  |
|--|--|--|
| $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$                                     | <b>Potenza ad esponente negativo</b>   | $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$                                     |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ | <b>Frazione con esponente negativo</b> | $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$ |

#### Esponente frazionario

|  |   |  |
|--|---|--|
| $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$  | <b>Potenza con esponente frazionario</b>          | $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$  |
| $a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$ | <b>Potenza con esponente frazionario negativo</b> | $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ |

## Proprietà delle potenze -- Esercizi svolti

1.  $(3^4 \cdot 3^7)^2 : 3^{19} =$

$(3^4 \cdot 3^7)^2 : 3^{19} = (3^{11})^2 : 3^{19} \rightarrow$  Prodotto di potenze con la stessa base  $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$  si sommano gli esponenti

$(3^{11})^2 : 3^{19} = 3^{22} : 3^{19} \rightarrow$  Potenza di una potenza  $(3^{11})^2 = 3^{22}$

$3^{22} : 3^{19} = 3^{22-19} \rightarrow$  Rapporto di potenze con la stessa base  $3^{22} : 3^{19} = 3^{22-19}$  si sottraggono gli esponenti

$$3^{22-19} = 3^3 = 27$$

2.  $(7^3 \cdot 7^8) : (7^5)^2 =$

$(7^3 \cdot 7^8) : (7^5)^2 = (7^{3+8}) : 7^{5 \cdot 2} \rightarrow$  Prodotto di potenze con la stessa base  $7^3 \cdot 7^8 = 7^{3+8}$  si sommano gli esponenti

$\rightarrow$  Potenza di una potenza  $(7^5)^2 = 7^{5 \cdot 2}$

$7^{11} : 7^{10} = 7^{11-10} = 7^1 = 7 \rightarrow$  Rapporto di potenze con la stessa base  $7^{11} : 7^{10} = 7^{11-10}$  si sottraggono gli esponenti

$$7^{11-10} = 7^1 = 7$$

3.  $(-3)^9 : (-3)^3 =$

$(-3)^9 : (-3)^3 = (-3)^{9-3} = \rightarrow$  Rapporto di potenze con la stessa base si sottraggono gli esponenti

$(-3)^6 = +3^6 \rightarrow$  Potenza pari di un numero negativo  $\rightarrow$  segno +

4.  $(-2)^2 \cdot (-2)^3 =$

$(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^{2+3} = (-2)^5 \rightarrow$  Prodotto di potenze con la stessa base si sommano gli esponenti

$(-2)^5 = -2^5 = -32 \rightarrow$  Potenza dispari di un numero negativo  $\rightarrow$  segno -

5.  $(-125)^3 \cdot (+5)^2 : (-25)^5 =$

Conviene esprimere tutto come potenza della stessa base. In questo caso 5.  $(-5^3)^3 \cdot (+5)^2 : (-5^2)^5 =$

$(-5^3)^3 \cdot (+5)^2 : (-5^2)^5 = (-5^9) \cdot 5^2 : (-5^{10}) \rightarrow$  Infatti  $(-5^3)^3$  ha segno - perché l'esponente è dispari ; potenza di una potenza gli esponenti si moltiplicano  $(-5^3)^3 = -5^{3 \cdot 3} = -5^9$

$\rightarrow$  Infatti  $(-5^2)^5$  ha segno - perché l'esponente è dispari ; potenza di una potenza gli esponenti si moltiplicano  $(-5^2)^5 = -5^{2 \cdot 5} = -5^{10}$

$(-5^9) \cdot 5^2 : (-5^{10}) = +5^{9+2-10} = 5$

$\rightarrow$  Segno totale + (due segni - ed un +). Per l'esponente si applica la proprietà per il prodotto ed il rapporto di potenze con la stessa base

6.  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 =$

$\left(\frac{3+2}{6}\right)^2 : \left(\frac{3-2}{6}\right)^2 = \rightarrow$  si svolgono prima le operazioni nelle parentesi

$\left(\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5^2}{6^2} : \frac{1^2}{6^2} \rightarrow$  Si applica la proprietà delle potenze per le frazioni

$\frac{5^2}{6^2} \cdot \frac{6^2}{1^2} = 5^2 = 25 \rightarrow$  Si trasforma la divisione in prodotto "ribaltando" la seconda frazione e si semplifica in croce